

Une formule sur les coefficients binomiaux (2023)

Une formule sur les coefficients binomiaux

Pour le calcul de S_n , la formule de Vandermonde appliquée à $p = q = n$ donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on en déduit que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n},$$

par la formule de Vandermonde.

Pour calculer T_n , on applique le changement d'indice $j = n - k$ et on utilise la formule de symétrie :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{n-j}^2 = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j}^2 \\ &= n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 - \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j}^2 = nS_n - T_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, $2T_n = nS_n$. D'où $T_n = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$.

D'autre part (autre démo vue dans vos DM), par la formule du capitaine, on a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k} \\ &= n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{(n-1)-(k-1)} \binom{n}{k} \\ &= n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{n-k} \binom{n}{k} \\ &= n \binom{2n-1}{n}, \end{aligned}$$

par la formule de Vandermonde. Ainsi, on remarque grâce aux deux calculs, que

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n}$$

[Exo amusant en corrigeant vos DM] :

Proposition (2022)

] Pour n, k entiers naturels non nuls,

$$\frac{1}{k} \binom{kn}{(k-1)n} = \binom{kn-1}{(k-1)n}$$

Une preuve calculatoire .

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \binom{kn}{(k-1)n} &= \frac{1}{k} \frac{kn \times (kn-1)!}{((k-1)n)! (kn - (k-1)n)!} \\ &= \frac{n \times (kn-1)!}{((k-1)n)! n!} \\ &= \frac{(kn-1)!}{((k-1)n)! (n-1)!}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a,

$$\begin{aligned} \binom{kn-1}{(k-1)n} &= \frac{(kn-1)!}{((k-1)n)! (kn-1 - (k-1)n)!} \\ &= \frac{(kn-1)!}{((k-1)n)! (n-1)!}. \end{aligned}$$

On en déduit donc la formule demandée.

Autre preuve : Cas particulier

On utilise la formule $\binom{n-1}{k} = \frac{n-k}{n} \binom{n}{k}$ avec kn et $(k-1)n$.